Université Paul Sabatier
L1 STS PCP

Toulouse, le 21 mai 2012

EXAMEN
DE MECANIQUE DU POINT
(Durée : 1h30)

Toutes les parties sont indépendantes. Toutes les justifications nécessaires seront notées.
Les documents personnels et les téléphones portables sont interdits.
Les résultats seront systématiquement exprimés en fonction des données des énoncés.

I – Bille en mouvement dans un tube en rotation

Dans un repère cartésien $\mathcal{R}\left(O,\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$ considéré comme galiléen, un tube *OA*, de section négligeable, est en rotation autour de l'axe *Oz* avec la vitesse angulaire constante ω. Ce tube est incliné d'un angle α constant par rapport à la verticale. On associe au tube le repère $\mathcal{R}'\left(O,\vec{e_{x'}},\vec{e_{y'}},\vec{e_z}\right)$ tel que, *H* étant le projeté orthogonal de *A* dans le plan (xOy), $\vec{e_{x'}}=\dfrac{\overrightarrow{OH}}{OH}$. Un point *M,* de masse *m*, peut se mouvoir *sans frottement* dans le tube.
On note *r* la distance de *O* à *M*, et $\vec{g}=-g\vec{e_z}$ le champ de pesanteur terrestre.

A. Préliminaires

- **a.** Sur un schéma, représenter les deux repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, et faire figurer explicitement, la distance *r*, l'angle α et le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, dont on précisera la norme et la direction.
- **b.** Donner la définition d'un repère galiléen. Qu'en est-il de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$?
- **c.** Réaliser le bilan des forces dans chacun des deux repères à $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$: donner leurs définitions mathématiques puis les expliciter de la manière la plus simple. On pourra, si on le veut, utiliser le vecteur unitaire $\vec{e_r}=\dfrac{\overrightarrow{OA}}{OA}$ et la base $\left(\vec{e_r},\vec{e_\alpha},\vec{e_{y'}}\right)$.

B. Application de la R.F.D.

- **a.** Enoncer la Relation Fondamentale de la Dynamique (RFD) dans $\mathcal{R}'$.
- **b.** Après projection de la RFD selon la direction $\vec{e_r}$, déterminer la **position d'équilibre** r_{eq} du point matériel *M* dans $\mathcal{R}'$.
- **c.** *M* étant à l'équilibre en r_{eq}, la vitesse angulaire de la tige est brusquement réduite à la valeur constante $\dfrac{\omega}{2}$ à un instant pris comme origine des temps : *r* va diminuer. Ecrire la RFD dans $\mathcal{R}'$ sous forme vectorielle, puis la projeter suivant $\vec{e_r}$. En déduire l'équation différentielle du mouvement.
- **d.** Déterminer l'expression de $r(t)$.
- **e.** Quel est le temps t_o mis par *M* pour atteindre *O* ?

C. Application du Théorème de la Puissance Mécanique (TPM)

- **a.** Donner la définition d'une force conservative. Qu'en est-il pour les forces s'exerçant sur *M* ?
- **b.** Déterminer l'énergie potentielle de *M*.
- **c.** Quelle est la position d'équilibre r_{eq}' de *M* ?
- **d.** Cette position d'équilibre est-elle stable ou instable ? Justifier.

e. M étant à l'équilibre en r_{eq}, la vitesse angulaire de la tige est brusquement réduite à la valeur constante $\dfrac{\omega}{2}$ à un instant pris comme origine des temps : r va diminuer. Déterminer l'énergie cinétique de M, puis, par application du TPM que l'on énoncera, donner l'équation du mouvement de M.

II – Satellite artificiel (inspiré de ICNA 2007)

Un satellite artificiel (S) est assimilé à une masse ponctuelle m = 2 tonnes. La Terre (T) est supposée être sphérique de rayon R_T ,de masse M_T et de répartition massique uniforme. On négligera toutes les interactions avec les corps autres que (T).

On note :
- G la constante universelle de gravitation
- $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre subit par S dans $\mathcal{R}$
- $\mathcal{R}(T, x, y, z)$ le référentiel galiléen géocentrique
- $\mathcal{B}\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$ la base sphérique orthonormée directe liée à $\mathcal{R}$ et associée à S.

A. Préliminaires :

a. Déterminer la somme des forces extérieures $\sum \overrightarrow{F_{ext}}\left(S/\mathcal{R}\right)$ s'exerçant sur S dans $\mathcal{R}$.

b. Donner la définition de $\overrightarrow{L_T}\left(S/\mathfrak{R}\right)$, moment cinétique de S en T par rapport à $\mathcal{R}$.

c. Déduire du théorème du moment cinétique les caractéristiques du mouvement de S.

B. Mouvement circulaire : on suppose que le mouvement de S autour de la Terre est plan, uniforme et circulaire à une altitude h autour de la Terre. On repère S par ses coordonnées polaires (ρ, φ) dans $\mathcal{R}$, et on définit la base $\mathcal{B}_{po}\left(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$ de $\mathcal{R}$, permettant de définir la position de S dans le plan du mouvement.

a. Déterminer les expressions de la vitesse $\vec{v}\left(S/\mathcal{R}\right)$ et de l'accélération $\vec{a}\left(S/\mathcal{R}\right)$ de S dans $\mathcal{R}$, en fonction des coordonnées polaires de S.

b. Déterminer les expressions de l'accélération $\vec{a}\left(S/\mathcal{R}\right)$ et de la vitesse $\vec{v}\left(S/\mathcal{R}\right)$ de S dans $\mathcal{R}$, en fonction de G, R_T , h et M_T .

c. Déterminer l'expression de la période T_o de révolution du satellite.

d. Qu'est-ce qu'un satellite géostationnaire ?

e. Sachant que $G = 6{,}67.10^{-11}\ \text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$, $M_T = 6.10^{24}\,\text{kg}$, $R_T = 6400\ \text{km}$ et que la période de révolution de la Terre est à peu près de 24 h, calculer l'altitude h pour laquelle le satellite est géostationnaire.

C. Energétique

a. Déterminer les expressions des énergies cinétique E_c, potentielle E_p et totale E du satellite géostationnaire.

b. Par analogie avec la question précédente (C. a.), rappeler les expressions des énergies potentielle E_p', totale E' et cinétique E_c' du satellite, dans le cas où il a une trajectoire elliptique de demi-grand axe a, la Terre étant un des foyers de l'ellipse.

D. Mouvement elliptique :

a. Représenter sur un schéma la trajectoire elliptique d'un satellite autour de la Terre, sur lequel on fera figurer la Terre, l'apogée et le périgée, le demi-grand axe a et le demi-petit axe b.

b. La vitesse du satellite est-elle plus grande au périgée ou à l'apogée ? Justifier.

c. Dans le mouvement elliptique, la période du satellite est de 7 jours. Enoncer la troisième loi de Képler, et en déduire la valeur de a.